第二章 一元二次函数、方程和不等式

模块一 不等式与二次函数

第 1 节 不等式的性质、一元二次方程与不等式（★★）

强化训练

1.（2023 • 全国模拟 • ★★）（多选）已知 a，b，c，d 均为实数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $a>b$，$c>d$，则 $a-d>b-c$

（B）若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

（C）若 $a>b$，$c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

（D）若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$

答案：AD

解析：A 项，结论中 d 和 c 前面都有负号，故在 $c>d$ 两端乘以 -1，

因为 $c>d$，所以 $-c<-d$，即 $-d>-c$，又 $a>b$，由同向不等式的可加性得 $a-d>b-c$，故 A 项正确；

B 项，同向同正的不等式才能相乘，B 项只满足同向，没有同正，故不对，下面举个反例，

取 $a=2$，$b=1$，$c=-2$，$d=-3$，满足 $a>b$，$c>d$，但 $ac=-4<bd=-3$，故 B 项错误；

C 项，$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ 可以看成 $a\cdot\frac{1}{d}>b\cdot\frac{1}{c}$，由 $c>d>0$ 可以得到 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，但 $a>b$ 中没规定 a，b 都为正数，不满足同向同正可乘的条件，所以 C 项不对，下面举个反例，

取 $a=-1$，$b=-2$，$c=2$，$d=1$，满足 $a>b$，$c>d>0$，但 $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}=-1$，故 C 项错误；

D 项，由 $bc-ad>0$ 可得 $bc>ad$，又 $ab>0$，所以 $\frac{1}{ab}>0$，在 $bc>ad$ 两端同乘以 $\frac{1}{ab}$ 可得 $bc\cdot\frac{1}{ab}>ad\cdot\frac{1}{ab}$，

化简得：$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，故 D 项正确.

2.（2022 • 吉林模拟 • ★★★）（多选）已知实数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $a+b+c=0$，则下列不等关系正确的是（　　）

（A）$ac<bc$　　（B）$\frac{1}{ab}>\frac{1}{bc}$　　（C）$ab^2<cb^2$　　（D）$\frac{c-a}{c-b}>1$

答案：AD

解析：a,b,c 关系清晰，可先取特值看能否排除选项，

取 $a=-3$，$b=1$，$c=2$，经检验，$\frac{1}{ab}<\frac{1}{bc}$，排除 B 项，

再取 $a=-2$，$b=0$，$c=2$，经检验，$ab^2=cb^2$，排除 C 项，

多选题到此已可确定选 AD，下面也给出严格分析过程，观察选项发现要用 a,b,c 的正负情况，故先判断，

因为 $a<b<c$，$a+b+c=0$，所以$\begin{cases}0=a+b+c<c+c+c=3c\\0=a+b+c>a+a+a=3a\end{cases}$，故 $c>0$，$a<0$，b 的正负均有可能，

A 项，因为 $a<b$，所以两端同乘以 c 可得 $ac<bc$，故 A 项正确；

B 项，由前面的分析可知 $\frac{1}{a}<0<\frac{1}{c}$，但 b 的正负不确定，所以 B 选项不对，下面举个反例，

取 $a=-3$，$b=1$，$c=2$，满足题干条件，此时 $\frac{1}{ab}=-\frac{1}{3}<\frac{1}{bc}=\frac{1}{2}$，故 B 项错误；

C 项，取 $a=-1$，$b=0$，$c=1$ 可知 $ab^2=cb^2=0$，故 C 项错误；

D 项，要比较 $\frac{c-a}{c-b}$ 与 1 的大小，可作差来看，$\frac{c-a}{c-b}-1=\frac{c-a-(c-b)}{c-b}=\frac{b-a}{c-b}$，

因为 $a<b<c$，所以 $b-a>0$，$c-b>0$，故 $\frac{c-a}{c-b}-1=\frac{b-a}{c-b}>0$，所以 $\frac{c-a}{c-b}>1$，故 D 项正确.

3.（2022·安徽模拟·★★）已知关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2)>0$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1<x<1$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-1]$　（B）$(-\infty,0)$　（C）$[2,+\infty)$　（D）$[1,+\infty)$

答案：D

解析：先求解 $(x-a)(x-2)>0$，a 与 2 的大小不确定，需讨论，

记 $(x-a)(x-2)>0$ 的解集为 A，$B=(-1,1)$，题干的条件等价于 B　A，

当 $a=2$ 时，$(x-a)(x-2)>0$ 即为 $(x-2)^2>0$，解得：$x\neq 2$，所以 $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，满足 B　A；

当 $a>2$ 时，$(x-a)(x-2)>0\Leftrightarrow x<2$ 或 $x>a$，所以 $A=(-\infty,2)\cup(a,+\infty)$，如图 1，满足 B　A；

当 $a<2$ 时，$(x-a)(x-2)>0\Leftrightarrow x<a$ 或 $x>2$，所以 $A=(-\infty,a)\cup(2,+\infty)$，如图 2，要使 B　A，应有 $1\le a<2$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

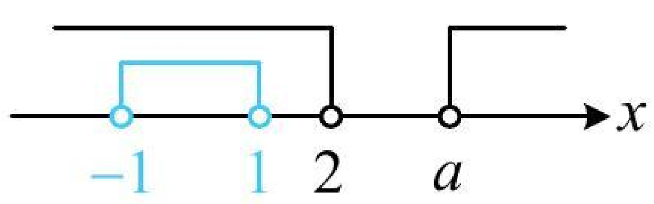


图1

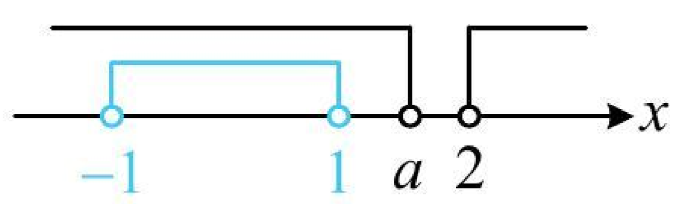


图2

4.（2023·江西模拟·★★）方程 $x^2-mx+1=0$ 在区间 $(-1,2)$ 上有根，则实数 m 的取值范围是_____.

答案：$(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

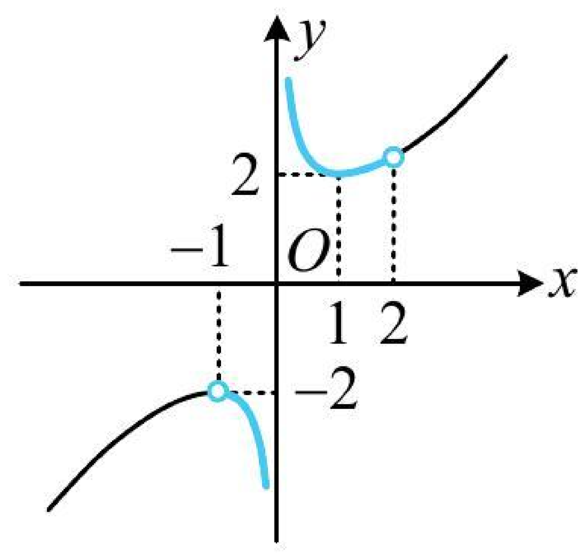
解析：只说有根，没规定几个根，考虑参变分离，$x^2-mx+1=0\Leftrightarrow mx=x^2+1$ ①，

接下来两端除以 x 即可分离出 m，但需考虑 $x=0$ 的情形，

当 $x=0$ 时，方程①不成立，所以 0 不是方程①的解；

当 $x\in(-1,0)\cup(0,2)$ 时，方程①等价于 $m=x+\frac{1}{x}$，函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的大致图象如图所示，

该函数在 $(-1,0)\cup(0,2)$ 上值域为 $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$，所以 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$.



5．（2022·成都七中模拟·★★★）（多选）关于 x 的方程 $x^2+(a-3)x+1=0$ 有两个不相等的大于 $\frac{1}{2}$ 的实数根的充分不必要条件可以是（　　）

（A）$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$　（B）$\frac{2}{3}<a<1$　（C）$\frac{1}{2}<a<1$　（D）$\frac{2}{3}<a\le 2$

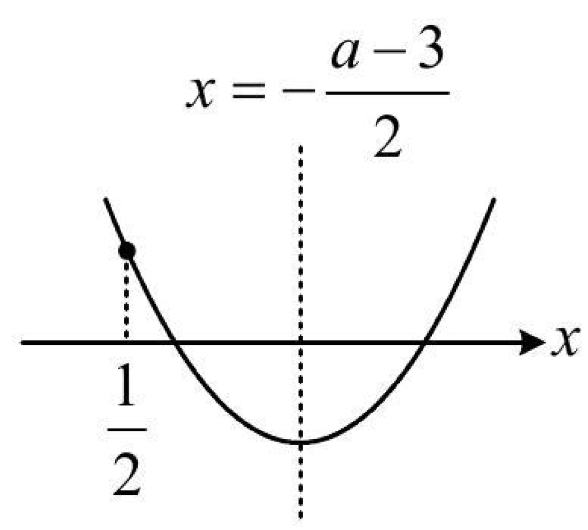
答案： AB

解析： 规定了 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上根的个数为 2，故考虑画二次函数的图象来看，

设 $f(x)=x^2+(a-3)x+1$，若原方程有 2 个大于 $\frac{1}{2}$ 的实根，则 $f(x)$ 的大致图象如图，

所以 $\begin{cases} f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{a-3}{2}+1>0 \\ \Delta=(a-3)^2-4>0 \\ 对称轴x=-\frac{a-3}{2}>\frac{1}{2} \end{cases}$，解得：$\frac{1}{2}<a<1$，题干让选充分不必要条件，故选其真子集即可，

所以答案为 A 和 B.



6．（2022·广安模拟·★★★）若关于 x 的不等式 $x^2-2ax-7a^2<0$ 的解集为 (x_0,x_0+16)，则实数 $a=$_____.

答案： $\pm 2\sqrt{2}$

解析： 观察发现解集的端点都含参，但差值不变，故可由韦达定理求出 $|x_1-x_2|$，从而建立方程求 a，

因为 $x^2-2ax-7a^2<0$ 的解集为 (x_0,x_0+16)，所以 x_0 和 x_0+16 是方程 $x^2-2ax-7a^2=0$ 的两根，

记 $x_1=x_0$，$x_2=x_0+16$，则由韦达定理，$\begin{cases} x_1+x_2=2a \\ x_1x_2=-7a^2 \end{cases}$，

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4a^2-4\times(-7a^2)}=4\sqrt{2}|a|$，

又 $|x_1-x_2|=|x_0-(x_0+16)|=16$，所以 $4\sqrt{2}|a|=16$，解得：$a=\pm 2\sqrt{2}$.

【反思】 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，除两根之和、两根之积的韦达定理外，两根之差的绝对值 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ 也需要掌握，它在解析几何中有广泛的应用.

7.（2023·湖南模拟·★★★）若函数 $f(x)=ax^2+(2-a)x-2$ 在 $(0,2)$ 上有且仅有 1 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

答案： $[-1,+\infty)\cup\{-2\}$

解析： 平方项系数为字母，先讨论其等于 0 的情形，

当 $a=0$ 时，$f(x)=2x-2$，由 $f(x)=0$ 可得 $x=1$，满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=0\Leftrightarrow ax^2+(2-a)x-2=0\Leftrightarrow x^2+\dfrac{2-a}{a}x-\dfrac{2}{a}=0$，问题等价于此方程在 $(0,2)$ 上有 1 个实根，

设 $g(x)=x^2+\dfrac{2-a}{a}x-\dfrac{2}{a}$，注意到 $g(0)=-\dfrac{2}{a}\neq 0$，所以 $g(x)$ 的图象有下面四种满足要求的情形，

若为图 1，则 $\Delta=\dfrac{(2-a)^2}{a^2}+\dfrac{8}{a}=0$，解得：$a=-2$，

经检验，此时 $g(x)=0$ 即为 $(x-1)^2=0$，解得：$x=1$，满足题意；

若为图 2 或图 3，此时无需分别考虑，统一处理即可，只需 $g(0)$ 和 $g(2)$ 异号，

所以 $g(0)g(2)=-\dfrac{2}{a}(4+\dfrac{4-2a}{a}-\dfrac{2}{a})<0$，整理得：$a+1>0$，故 $a>-1(a\neq 0)$；

若为图 4，则 $g(2)=4+\dfrac{4-2a}{a}-\dfrac{2}{a}=2+\dfrac{2}{a}=0$，解得：$a=-1$，此时 $g(x)=x^2-3x+2$，

由 $g(x)=0$ 可得 $x=1$ 或 2，满足 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有且仅有 1 个零点；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)\cup\{-2\}$.

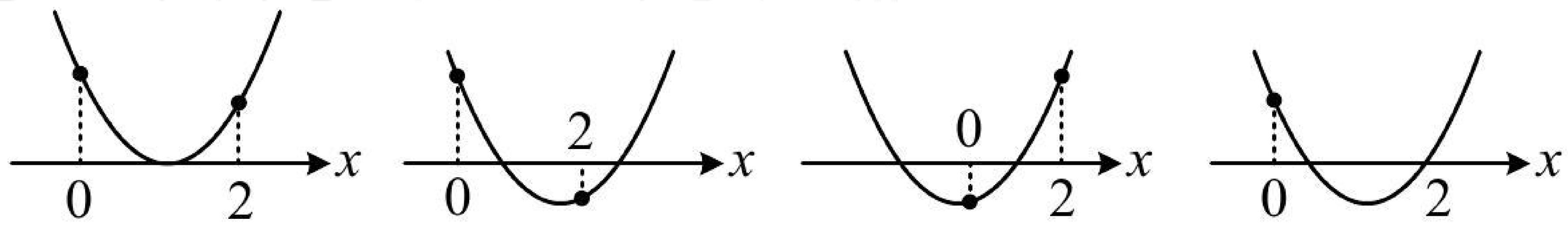


图1　图2　图3　图4

8.（2023·新高考Ⅱ卷·★★★）（多选）若函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则（　）

（A）$bc>0$　（B）$ab>0$　（C）$b^2+8ac>0$　（D）$ac<0$

答案： BCD

解析： 由题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2c}{x^3}=\dfrac{ax^2-bx-2c}{x^3}(x>0)$，

函数 $f(x)$ 既有极大值，又有极小值，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个变号零点，

故方程 $ax^2-bx-2c=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不相等实根，

所以 $\begin{cases}\Delta=(-b)^2-4a(-2c)>0 & ①\text{(保证有两根)}\\ x_1x_2=-\dfrac{2c}{a}>0 & ②\text{(保证两根同号)}\\ x_1+x_2=\dfrac{b}{a}>0 & ③\text{(保证两根只能同正)}\end{cases}$，由①可得 $b^2+8ac>0$，故 C 项正确；

由②可得$\frac{c}{a}<0$，所以a，c异号，从而$ac<0$，故D项正确；

由③可得a，b同号，所以$ab>0$，故B项正确；

因为a，c异号，a，b同号，所以b，c异号，从而$bc<0$，故A项错误.